Početní část 1 - 8.2.2021

1. Určete, pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ jsou obě limity
$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^{-a})^{\sqrt{x}}, \quad \lim_{n \to \infty} n^a (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1})$$
zároveň konečné. (7 bodů).

2. (a) Dokažte, že pro $x < 0$ platí $\frac{x}{x^2+1} \in [-\frac{1}{2}, 0)$.

   (b) Vyšetřete průběh (definiční obor, spojitost, symetrie, limity v krajních bodech, derivaci (včetně jednostranných derivací a případně limit derivací v krajních bodech), monotonii, lokální a globální extrémy, obor hodnot, druhou derivaci, konvexitu, konkavitu, inflexní body, asymptoty, obrázek) funkce definované předpisem
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$
   $(13, 5$ bodu).

   Nápověda: Po spočtení první derivace neurčujte její nulové body, místo toho určete její znaménko v každém z intervalů, kde je definovaná, s využitím výsledku z bodu (2a).